Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon

Gilles Aldon

16 novembre 2021

1 Le premier problème ouvert : les chaînes de chiffres

- Les seules opérations considérées sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division.
- On peut utiliser des parenthèses.
- Les règles qui s'appliquent sont les règles habituelles du calcul numérique.

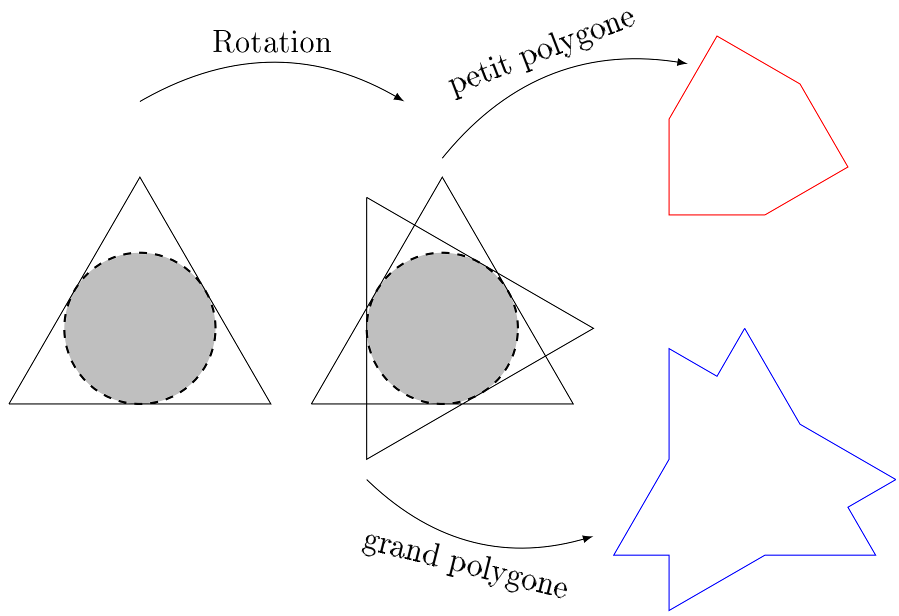
Soit a un nombre entier positif.

- On appelle chaîne de a une suite d'opérations qui n'utilisent que le nombre a.
- On appelle valeur de la chaîne le résultat du calcul.
- On appelle longueur de la chaîne le nombre d'opérations.

2 Polygones

L'énoncé

- On part d'un cercle C et on appelle A son centre.
- On construit un polygone P dont tous les côtés sont tangents au cercle C.
- On construit ensuite un polygone P' en faisant tourner P autour du point A.
- A partir des deux polygones P et P', on peut définir deux nouveaux polygones : un « petit polygone », intersection de P et P', et un « grand polygone », réunion de P et P'.
- Cette situation sera illustrée, par exemple avec un logiciel de géométrie dynamique, et commentée.
- On s'intéressera à différentes propriétés du polygone P (formes possibles, périmètre, aire,...), puis à des propriétés du « petit polygone » et du « grand polygone » obtenus par différentes rotations.



3 2013

Trouver le plus grand nombre d'entiers entre 0 et ... qui sont le résultat d'opérations utilisant les chiffres de 2013, exactement une fois chacun, et uniquement ces chiffres.
Pour chacun de ces nombres, trouver un maximum d'écritures différentes à partir des chiffres 2, 0, 1, 3 dans cet ordre. A défaut, on cherchera une écriture utilisant ces chiffres dans le désordre.

4 Les boîtes explosives

On dispose de n récipients dans lesquels on doit mettre les nombres entiers, dans l'ordre avec la seule condition qu'il est impossible de mettre dans un récipient un nombre s'il est égal à la somme de deux nombres déjà présents. Jusqu'à quel nombre peut-on aller ?

5 Nombre de multiplications

Dans ce problème on travaillera **avec les nombres entiers strictement positifs.**
On cherche le nombre de multiplications donnant comme résultat un certain nombre entier. Par exemple :
$?\times? = 2$ est une multiplication de deux nombres dont le résultat est 2.
Il y en a exactement 2 différentes :
$2 \times 1 = 2$
$1 \times 2 = 2$
A vous de jouer !
Pouvez-vous trouver toutes les multiplications de deux facteurs dont le résultat vaut 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100,. . ., 2015,. . .
Pouvez vous trouver une règle générale pour compter ces multiplications ?
Lorsque la multiplication est une multiplication de trois nombres
Un exemple

$$?\times?\times? = 2$$

Il y a exactement 3 multiplications différentes :

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & \times & 1 & \times & 1 & = & 2 \\ 1 & \times & 2 & \times & 1 & = & 2 \\ 1 & \times & 1 & \times & 2 & = & 2 \end{array}$$

TABLE 1 – Les 3 multiplications de trois nombres dont le résultat est 2

A vous de jouer !
Pouvez vous trouver toutes les multiplications de trois facteurs dont le résultat vaut 3, 4, 5, 6.
Combien de multiplications différentes de trois facteurs donnent comme résultat 100 ? 1000 ? 2015 ?...
Pouvez vous trouver une règle générale pour compter ces multiplications ?
Et avec quatre nombres ?

6 Le problème qui déchire

Tout part d'une feuille de papier que l'on va couper en plusieurs morceaux.
Imaginons : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?
Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?
Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ?...
Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ? Et si je voulais atteindre 2015 ? 2017 ? 2018 ? et si je voulais atteindre un nombre n de morceaux, quelles seraient les découpes qui me permettraient de l'atteindre ?
Maintenant, je choisis de couper ma feuille en deux ou en trois parties. Est-ce que je peux atteindre 2016 ? De combien de façons différentes ?
Et si je coupe en trois ou quatre parties ? En six ou huit parties ?... Est-ce que je peux toujours obtenir 2016 morceaux de papier ?
Et si oui, de combien de façons différentes ?
Et si je choisis un nombre entier n. Pourrais-je toujours découper ma feuille pour avoir à un certain moment n morceaux de papier ? Et de combien de façons différentes ?

7 Les grilles diaboliques

Pour le problème de cette année vous n'aurez besoin que de trois nombres : 1, 0 et -1... et de grilles !
Il faudra remplir les grilles avec ces nombres mais avec une condition supplémentaire : en faisant la somme des nombres placés dans chacune des lignes et dans chacune des colonnes, vous trouverez des résultats tous différents. On dira qu'une grille est gagnante si aucune des sommes des lignes et des colonnes ne sont égales.
Quelles sont les grilles gagnantes de taille 2×2 ? De taille 3×3 ? de taille 4×4 ? ... de taille $n \times n$? Et plus généralement :

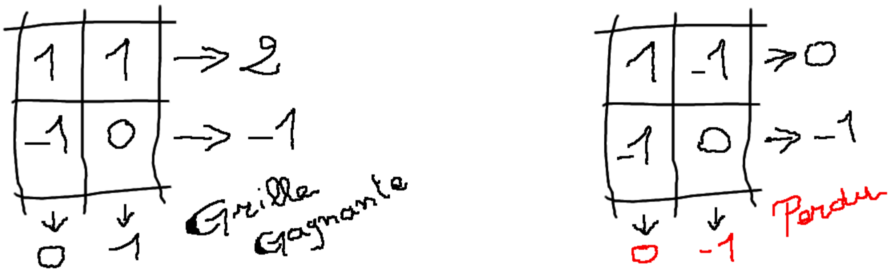
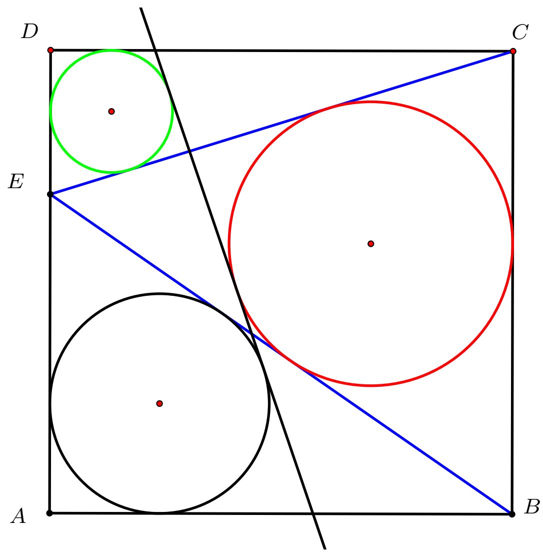


Figure 1 – Une grille gagnante, une grille perdante

Quelles sont les grilles que vous pouvez remplir en respectant cette règle ?

8 Sangaku

$ABCD$ est un carré de côté 1. E est un point de $[AD]$ (ou de (AD)).
Les cercles sont inscrits dans les triangles ABE, BEC et ECD.
Quelles questions pouvez vous poser ? Quelles conjectures pouvez vous émettre ?
Éventuellement est-ce que vous pouvez répondre aux questions ? Prouver ou réfuter les conjectures ?



9 Billards

Dans une pièce polygonale obscure, j'utilise un pointeur laser qui se reflète sur les murs de telle sorte que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Autrement dit, si le rayon arrive sur le mur avec un angle de α degré, il en repart avec le même angle.
Dans un premier temps, nous considèrerons que les polygones sont réguliers. Ainsi, le triangle sera équilatéral, le quadrilatère, un carré, le pentagone, un pentagone régulier, etc.
On suppose d'abord que la pièce est de forme triangulaire ; c'est à dire, comme nous venons de le voir, un triangle équilatéral. On place la source du laser sur un des côtés et on vise un autre côté.