© Alfonso de Tomas/shutterstock.com

LOGIQUE & CALCUL

Les mathématiques de l'origami

Si l'art du papier plié remonte à plusieurs siècles, son étude mathématique est récente et révèle des liens étroits avec l'algèbre, la théorie des nombres ou l'algorithmique.

Jean-Paul DELAHAYE

L'origami est l'art de plier du papier pour en faire une sculpture, soit géométrique, par exemple une boîte ou un polyèdre, soit figurative – un animal, une fleur, un personnage, etc. Dans la forme pure de l'origami, on part d'une feuille carrée, et seuls sont autorisés des plis rectilignes sans découpage aux ciseaux. Dans d'autres formes de l'art du papier, on accepte l'utilisation de plusieurs feuilles pour une même construction (origami modulaire), leur découpage et leur collage, le mouillage du papier pour en fixer la forme, ou encore l'aide d'outils pour dessiner des plis arrondis.

L'origami, en tant qu'art du pliage sans découpage ni collage à partir d'une feuille carrée, est né au Japon au XVII^e^ siècle et s'est répandu dans le monde entier au XIX^e^. Son histoire plus ancienne est difficile à établir car les œuvres se conservent mal, mais des jeux de pliages ont certainement existé en Chine, en Italie, en Allemagne et en Espagne bien avant le succès mondial de ce délicieux passe-temps créatif.

L'étude mathématique de l'origami commencée dès 1907 a connu des progrès considérables depuis 30 ans et s'est révélée d'une grande richesse. On a su démontrer de remarquables résultats permettant en particulier de savoir quels nombres étaient « constructibles par origami ». Ces nombres sont analogues à ceux « constructibles à la règle et au compas » qui, au XIX^e^ siècle, ont permis de résoudre (par la négative) le problème de la quadrature du cercle. Depuis 1989, il existe d'ailleurs un congrès international consacré aux aspects mathématiques de l'origami et à son utilisation dans l'enseignement. La sixième édition de ce congrès s'est réunie en août 2014 à Tokyo.

Les quelques théorèmes que nous allons présenter constituent les bases d'une discipline qui s'étend et semble d'ailleurs devoir jouer un rôle aussi bien en biologie (où le repliement des protéines est un problème central) que dans le domaine des technologies nouvelles où la conception de structures reconfigurables, éventuellement microscopiques, demande une compréhension toujours plus fine des opérations d'articulation et de pliage.

Les canevas de plis

Commençons par nous concentrer sur l'origami pur qui, partant d'une seule feuille de papier carrée, consiste à utiliser des plis rectilignes afin d'arriver à une forme repliée plate. En France, le plus connu de ces pliages purs est la cocotte en papier. Au Japon, c'est un autre oiseau : la grue, plus élégante mais aussi plus difficile.

Prenez une feuille et faites la cocotte (*voir l'encadré ci-contre ou la vidéo www.youtube.com/watch?v=770X1FIJLIo*). Une fois le résultat obtenu, dépliez la feuille et considérez les dessins marqués sur cette feuille par les plis (uniquement ceux vraiment utiles à la forme finale) en les dessinant en rouge et en bleu : le rouge pour les plis « montagne », le bleu pour les plis « vallée ». Vous avez obtenu ce qu'on nomme le « canevas de l'origami » (*crease pattern* en anglais). Ne croyez pas que n'importe quel schéma de traits rectilignes bleus et rouges est un canevas possible. Deux théorèmes principaux indiquent les règles que vérifie tout canevas d'origami. Ces règles permettent de déceler d'éventuelles erreurs dans le dessin d'un canevas.

Le premier de ces théorèmes indique que les nombres de traits rouges R et de traits bleus B se rencontrant en un point intérieur à la feuille doivent vérifier : $R = B + 2$ ou $R = B - 2$.

Ce théorème, découvert en 1989 par le Français Jacques Justin et redécouvert par la suite par le Japonais Jun Meakawa devrait porter le nom du Français, mais l'usage en a décidé autrement : aujourd'hui, tout le monde désigne par « théorème de Meakawa » cette remarquable propriété ! N'est-il pas étonnant que cette règle très simple et qu'on démontre assez facilement ait attendu aussi longtemps pour être identifiée ? Elle est d'une réelle utilité pour dessiner des canevas justes.

L'encadré ci-contre illustre ce théorème ainsi que d'autres propriétés des canevas d'origamis purs. On y explique aussi que la question de savoir si un canevas satisfaisant les deux théorèmes principaux peut

© Pour la Science - n° 448 - Février 2015

pls_0448_p076081_logique_calcul.indd 76 08/01/15 18:44

Cocottes, canevas et théorèmes de l'origami

Les instructions pour obtenir la célèbre cocotte en papier sont indiquées ici *(a)*. Le gallinacé obtenu, remettons la feuille à plat et examinons soigneusement les plis *(b)*. Il y en a trois catégories :

– Les plis *montagne (en rouge)*, qui sont ceux où la feuille pliée forme une ligne de crête de la cocotte repliée.

– Les plis *vallée (en bleu)* où, à l'opposé, la feuille pliée présente un creux.

– Quelques autres plis *(en gris)* ont été utilisés lors de la construction, mais sont à plat dans la forme pliée finale.

Les canevas qui nous intéressent sont ceux des plis finaux. Leurs propriétés mathématiques spécifiques sont :

Propriété 1. Les zones *(c, en jaune et en vert)* de la feuille délimitées par les plis *montagne* ou *vallée* sont coloriables avec deux couleurs sans que deux zones voisines soient de la même couleur.

Propriété 2. Tout sommet du graphe dessiné par les plis rouges ou bleus et intérieur à la feuille vérifie le théorème de Maekawa : il s'y rejoint soit deux arcs rouges de plus que d'arcs bleus, soit deux arcs bleus de plus que d'arcs rouges. Ici, il y a quatre nœuds intérieurs à la feuille et s'y rencontrent quatre arcs rouges et deux bleus *(en haut à gauche)*, ou (pour les autres) trois arcs bleus et un rouge. Ainsi, le nombre d'arcs se rencontrant en un sommet intérieur est pair, ce qui implique d'ailleurs la propriété 1.

Propriété 3. Les angles formés par les arcs (en nombre pair) concourant en un sommet intérieur $(a_1, a_2, ..., a_{2n})$ vérifient le théorème de Kawasaki :
$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... - a_{2n} = 0.$

Puisque $a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_{2n} = 360°$, la somme des angles de numéro pair et la somme des angles de numéro impair valent chacune 180°. Pour la cocotte en papier, les angles du sommet où se rejoignent quatre arcs rouges et deux bleus sont $a_1 = 90°$, $a_2 = 90°$, $a_3 = 45°$, $a_4 = 45°$, $a_5 = 45°$, $a_6 = 45°$ et on a :

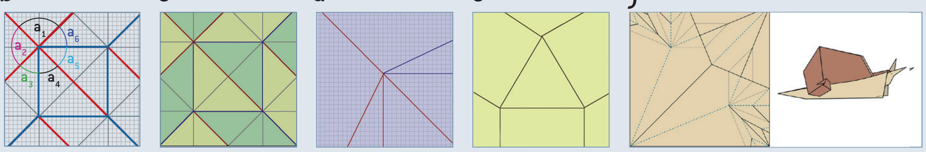
$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 = 0,$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 360°,$$
$$a_1 + a_3 + a_5 = a_2 + a_4 + a_6 = 180°.$$

a

Rabattre vers le centre les quatre coins d'une feuille carrée *(1)*, puis mettre sur l'envers l'un d'eux *(2)*. Replier les quatre angles vers le centre *(3)*. Renverser le pliage *(4)*, sortir la pointe C et replier A sur B *(5)*.

Écarter D et son symétrique *(6)* et sortir la queue *(7)*. Sortir les pattes E *(7)* et les déplier vers le bas *(8)*.

b *c* *d* *e* *f*



Tout canevas d'origami est impossible s'il n'a pas les trois propriétés, mais tout canevas qui les a ne rend pas possible un pliage selon les plis du canevas (et eux seuls). En effet, en voulant réaliser les pliages dessinés, on rencontre parfois une situation où il faudrait forcer la feuille à se traverser elle-même. Une telle situation est illustrée en *d* : les trois propriétés sont satisfaites, mais le pliage à plat de l'ensemble est impossible (essayez !).

La condition $a_1 - a_2 + ... - a_{2n} = 0$ sur les angles autour d'un nœud du graphe est nécessaire et suffisante pour qu'il existe une façon de plier *localement* à plat la feuille. Autrement dit, si cette condition est vérifiée, il existe une façon de choisir pour chaque pli dessiné s'il est *montagne* ou *vallée* et qui permet le pliage à plat. Une question se pose alors : si un dessin de plis (ne précisant pas les plis *vallée* et *montagne*) est donné, tel que chaque nœud du graphe vérifie la condition du théorème de Kawasaki (donc chaque nœud est localement pliable à plat), peut-on le plier globalement à plat ? La réponse est non. Un exemple (proposé par Thomas Hull en 1994) d'une telle situation où les pliages à plat sont possibles localement, mais incompatibles globalement, est donné en *e*. Savoir si, pour un graphe donné sur une feuille, il est possible ou non de choisir *montagne* ou *vallée* pour chaque pli de façon à satisfaire les trois conditions est algorithmiquement facile : Marshall Bern et Barry Hayes ont décrit un algorithme qui fonctionne en temps linéaire (en fonction du nombre d'arcs du graphe) et qui trouve une telle assignation s'il y en a, ou conclut qu'il n'en existe pas.

Puisque trouver une telle assignation ne garantit pas que le pliage est faisable, une question se pose : disposant d'une assignation correcte (c'est-à-dire satisfaisant les trois propriétés) peut-on rapidement savoir si la feuille est pliable globalement à plat selon les plis de l'assignation ? Cette fois, la réponse est non, car ce problème est NP-complet : on ne connaît aucun algorithme capable de le résoudre en temps polynomial. Le canevas représenté en *f* est dû au grand origamiste Robert Lang (les plis *montagne* sont tracés en noir et les plis *vallée* en pointillé bleu). Les propriétés 1-3 sont satisfaites à chaque nœud interne de la feuille. Pour un bon origamiste, la connaissance du canevas et d'une image de l'objectif à atteindre suffit : il devinera comment et dans quel ordre opérer les plis pour arriver à la sculpture en papier.

© Alfonso de Tomas/shutterstock.com

pls_0448_p076081_logique_calcul.indd 77 08/01/15 18:44

Les axiomes de Justin-Huzita-Hatori

Les constructions de plis et de points par intersection de plis faisables lorsqu'on manipule une feuille de papier (supposée plane) sont décrites par une série de sept axiomes découverts par Jacques Justin, Humaki Huzita et Koshiro Hatori.

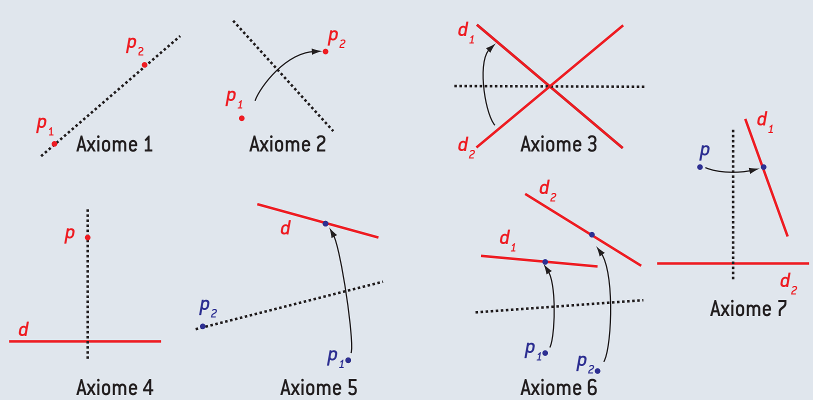
Axiome 1. Étant donnés deux points p_1 et p_2, il existe un pli unique passant par eux.
Axiome 2. Étant donnés deux points p_1 et p_2, il existe un pli unique amenant p_1 sur p_2.
Axiome 3. Étant données deux droites d_1 et d_2, il existe un pli qui amène d_1 sur d_2.
Axiome 4. Étant donnés un point p et une droite d, il existe un pli unique perpendiculaire à d qui passe par p.
Axiome 5. Étant donnés deux points p_1, p_2 et une droite d, il existe un pli qui place p_1 sur d et qui passe par p_2.
Axiome 6. Étant donnés deux points p_1, p_2 et deux droites d_1, d_2, il existe un pli qui place p_1 sur d_1 et p_2 sur d_2.
Axiome 7. Étant donnés un point p et deux droites d_1 et d_2, il existe un pli qui place p sur d_1 et qui est perpendiculaire à d_2.

Ces axiomes n'envisagent qu'un seul pli à la fois. La possibilité de faire plusieurs plis à la fois a été étudiée et on a montré qu'elle enrichit le répertoire des possibilités.

Si l'on a au départ deux points supposés distants d'une unité, et qu'on considère tous les points que peuvent faire apparaître les pliages successifs de la feuille sur laquelle ils sont donnés, ce qui revient à appliquer les axiomes 1-7, les coordonnées des points résultants constituent l'ensemble des nombres constructibles par origami, que l'on notera OR. L'idée de la définition est analogue à celle de l'ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas défini à partir de deux points distants d'une unité. Cet ensemble des nombres constructibles à la règle et au compas sera noté RC.

Un cercle étant donné sur un plan, peut-on dessiner à la règle et au compas un carré dont l'aire soit la même que celle du disque délimité par le cercle ? Ce problème dit de la quadrature du cercle équivaut à déterminer si le nombre π est dans RC. Grâce aux travaux de Ferdinand Lindemann, on sait depuis 1882 que la réponse est négative : aucune construction à la règle et au compas ne permettra, partant de deux points distants d'une unité, d'en construire deux distants de π unités. La théorie des constructions à la règle et au compas montre aussi que la racine cubique de 2 n'est pas dans RC, et la trisection d'un angle quelconque est impossible à la règle et au compas.

L'ensemble OR est plus grand que RC. Le nombre π n'est pas dans OR et la quadrature du cercle reste impossible par origami, mais la racine cubique de 2 l'est. L'antique problème de la duplication du cube, impossible à la règle et au compas, est donc soluble par origami. On peut aussi trisequer un angle par origami *(voir l'encadré suivant)*.



vraiment se replier à plat est NP-complet (c'est-à-dire algorithmiquement difficile).

Quand on opère des plis, par exemple pour amener l'un sur l'autre deux plis déjà marqués sur la feuille, on réalise l'équivalent d'une construction géométrique sur la feuille. La trace de l'ensemble des plis sera observée en remettant la feuille à plat. Ces constructions géométriques par pliage qu'on imagine réaliser avec une précision parfaite (plis infiniment fins et rectilignes, alignements exacts, etc.), sont analogues aux constructions que les Grecs faisaient avec une règle et un compas, et qui les ont conduits à énoncer le célèbre problème de la quadrature du cercle, attribué à Anaxagore vers – 430 : construire π à la règle et au compas *(voir l'encadré ci-contre)*.

Sept types de plis pris comme axiomes

Les mathématiciens origamistes se sont donc demandé si les pliages autorisent plus de constructions, moins de constructions ou exactement les mêmes constructions que la règle et le compas des Grecs. La réponse, subtile, est d'une remarquable précision.

Elle nécessite d'abord de déterminer explicitement les opérations de pliage qu'on s'autorise et de les classer. Quand on opère un seul pli à la fois, il y a sept plis possibles, donc sept constructions possibles d'un nouveau pli à partir de plis ou de points déjà présents sur la feuille. Ces sept opérations de base définissent les sept axiomes de base de l'origami, les « axiomes de Justin-Huzita-Hatori ».

Si l'on s'impose de n'utiliser que les quatre premiers axiomes, on parle d'origami pythagoricien ; le pouvoir de construction géométrique obtenu est celui de la règle et du compas à pointe sèche (qui permet de reporter des longueurs, mais pas de dessiner des cercles).

Ce pouvoir de construction définit les « nombres pythagoriciens » qui sont les nombres pouvant intervenir dans les coordonnées d'un point résultant d'une construction au moyen des quatre axiomes (ou à

© Pour la Science - n° 448 - Février 2015
pls_0448_p076081_logique_calcul.indd 78 08/01/15 18:44

la règle et au compas à pointe sèche). Sur le plan algébrique, les nombres pythagoriciens s'obtiennent en partant des entiers et en opérant successivement, autant de fois qu'on le veut, des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et l'opération qui à a et b associe la racine carrée de $a^2 + b^2$. Ainsi, $\sqrt{2}$ est un nombre pythagoricien puisque $2 = 1^2 + 1^2$, et il en est de même, par exemple, du nombre :

$$\frac{\sqrt{9+(1+\sqrt{2})^2}}{11/\sqrt{2}}\ .$$

Les racines carrées de nombres entiers (tel 3) qui ne sont pas sommes de deux carrés d'entiers ne sont pas des nombres pythagoriciens. Le nombre π et la racine cubique de 2 ne sont pas pythagoriciens non plus.

Ce pouvoir de construction des plis des quatre premiers axiomes est inférieur à celui de la règle et du compas. Pour obtenir ce pouvoir de construction (ni plus, ni moins), il faut ajouter le cinquième type de plis, défini par l'axiome 5.

Construire les nombres euclidiens par origami

Les nombres obtenus sont qualifiés d'euclidiens : ce sont tous les nombres qu'on obtient à partir des entiers en effectuant des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et des extractions de racine carrée. Par exemple, le nombre suivant est euclidien :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}/(4+\sqrt{11})}}{\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{21}}}\ .$$

On sait que le nombre π n'est pas euclidien et c'est pourquoi le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution quand on s'impose de n'utiliser que la règle et le compas. Il n'en aura pas non plus avec les constructions par pliage avec les cinq premiers types de plis et même avec les sept. La racine cubique de 2 n'est pas non plus un nombre euclidien et c'est pourquoi l'antique problème de la duplication du cube (partant d'un cube donné, construire à la règle et au

Théorème de Haga, duplication du cube, trisection d'un angle

Les nombres rationnels
Le théorème de Kazuo Haga indique un moyen de construire rapidement par pliage tout nombre rationnel (quotient de deux entiers).

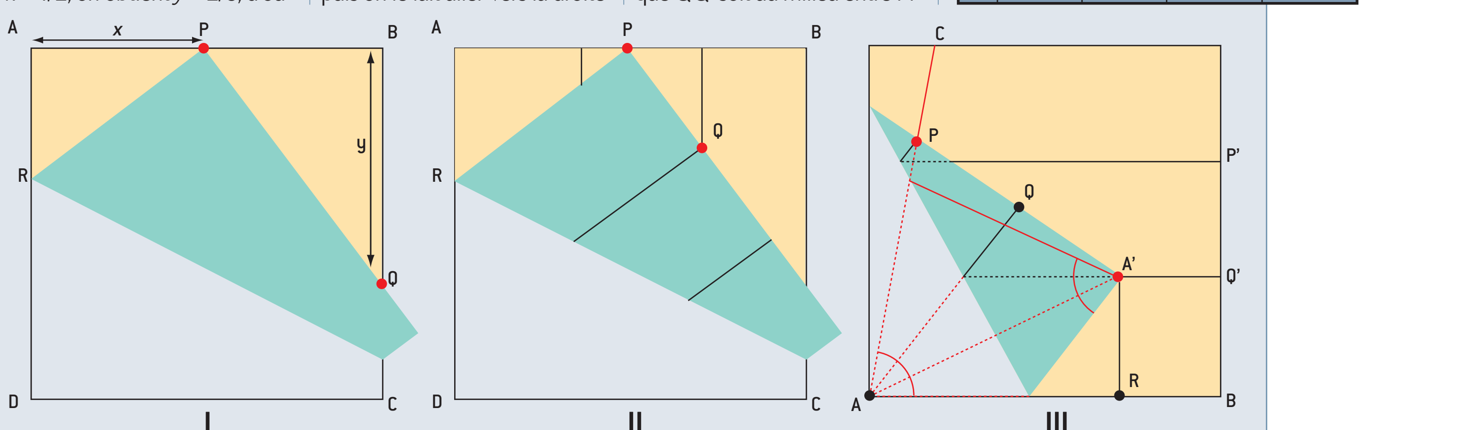
On part (*figure I*) d'une feuille carrée de côté 1, où est marqué un point P sur le bord en haut du carré. Ce point P a été obtenu par des opérations de plis précédentes. On effectue le pli qui amène le coin en bas à gauche sur P. Posons x = AP. Un petit raisonnement montre que y = BQ = $2x/(1+x)$. Si l'on prend $x = 1/2$, on obtient $y = 2/3$, d'où l'on déduit 1/3. Par ce procédé, de proche en proche, on obtient toutes les fractions que l'on veut. Le tableau ci-contre constitue une aide.

Racine cubique de 2
Le pliage de Peter Messer permet de « calculer » la racine cubique de 2 (impossible à obtenir à la règle et au compas).

On fait glisser le point P (le coin gauche en bas de la feuille carrée) sur le bord de la feuille en haut (*figure II*). On le place au départ en haut à gauche, puis on le fait aller vers la droite jusqu'à ce que le point Q (le bas de la ligne verticale à 1/3 de distance du bord gauche de la feuille) rejoigne la ligne verticale à 2/3 de distance du bord gauche de la feuille. Quand cela se produit, on a la position définitive de P et PB/PA est égal à la racine cubique de 2.

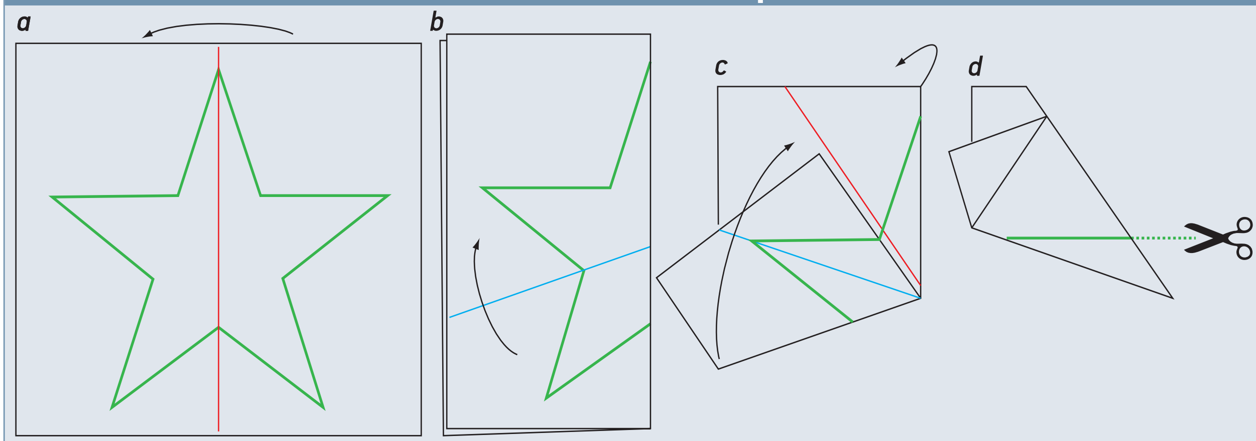
Trisection d'un angle
Voici la construction par origami de la trisection d'un angle CAB, due à Hisashi Abe (*figure III*). On fait deux plis horizontaux PP' et QQ' de façon que QQ' soit au milieu entre PP' et le bord inférieur du carré de papier. Puis on amène P sur le segment AC, en même temps que le point A est amené sur le pli QQ'. L'angle A'AB est le tiers de l'angle CAB (car les trois angles PAQ, QAA', A'AB sont égaux).

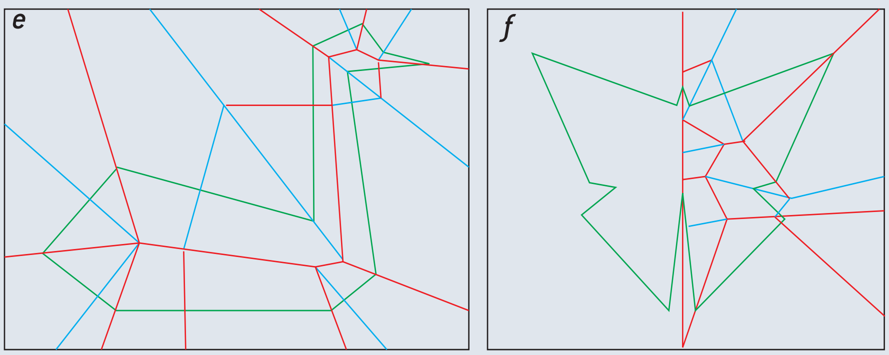
AP	BQ	QC	AR	PQ
x	$2x/(1+x)$	$(1-x)/(1+x)$	$(1-x^2)/2$	$(1+x^2)/(1+x)$
1/2	2/3	1/3	3/8	5/6
1/3	1/2	1/2	4/9	5/6
2/3	4/5	1/5	5/18	13/15
1/5	1/3	2/3	12/25	13/15



pls_0448_p076081_logique_calcul.indd 79 08/01/15 18:44

Tout faire en un seul coup de ciseaux





Erik Demaine, Martin Demaine et Anna Lubiw ont démontré en 1999 que, quel que soit le dessin composé de segments de droite tracé sur une feuille, il est possible de replier la feuille et de donner un coup de ciseaux (un seul !) qui la coupera exactement sur les traits dessinés. On peut ainsi découper une étoile en un coup de ciseaux (*a-d*), ou réaliser des dessins plus complexes, tels un canard ou un papillon (*e, f*). Pour plus de précisions, voir le site de E. Demaine (http://erikdemaine.org/foldcut/).

compas un cube dont le volume soit double) n'a pas de solution.

Les cinq premiers axiomes de l'origami conférant le pouvoir de construction de la règle et du compas, l'ajout des axiomes 6 et 7 du pliage offre-t-il le moyen de le dépasser ? La réponse est oui. L'ensemble des « nombres constructibles par origami » (avec les sept types de plis) est plus grand que l'ensemble des nombres euclidiens. Du point de vue du mathématicien, cet ensemble de nombres s'obtient à partir des entiers en opérant des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions, des extractions de racine carrée et des extractions de racine cubique. Un exemple de nombre constructible par origami, mais qui ne l'est pas à la règle et au compas, est ainsi :

$$\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt[3]{21}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}/(4+\sqrt{2})}}.$$

Cette fois, la duplication du cube est possible, de même d'ailleurs que la trisection de l'angle, qui ne l'est ni avec les cinq premiers axiomes, ni à la règle et au compas. L'étude de l'axiome 7 montre qu'il est superflu, car les constructions qu'il permet sont les mêmes que celles obtenues avec les six premiers. Ces nombres constructibles par origami contiennent tous les nombres solution d'une équation polynomiale de degré 1, 2, 3, ou 4. Des procédés pratiques de pliage ont été décrits pour résoudre par pliages les équations quelconques de degré 3. Ce pouvoir de construction de l'origami est celui dont aurait disposé un géomètre grec muni d'une règle et d'un compas et capable de tracer exactement toute conique (ellipses, paraboles, hyperboles).

Même avec les sept plis, on ne réussira pas la quadrature du cercle, et beaucoup de nombres algébriques (solutions d'équations polynomiales à coefficients entiers), tels que la racine cinquième de 2, sont aussi hors de portée.

Cependant, si l'on envisage des plis multiples – plusieurs plis sont ajustés simultanément pour obtenir une certaine construction –, on obtient avec l'origami un pouvoir de construction encore supérieur, dont on ignore aujourd'hui jusqu'où il va exactement.

Plis multiples pour nombres algébriques

Robert Lang a par exemple montré que la quintisection (division d'un angle donné en cinq angles égaux) d'un angle quelconque est impossible en utilisant les sept axiomes de base de l'origami, mais qu'en acceptant un double pliage, elle devient possible. L'étude de ces nouveaux plis risque d'être difficile, et l'ordinateur sera indispensable. C'est grâce à lui que Roger Alperin et R. Lang ont calculé que le nombre

© Pour la Science - n° 448 - Février 2015

pls_0448_p076081_logique_calcul.indd 80 08/01/15 18:44

d'axiomes à envisager pour les doubles plis est 489. Ces deux chercheurs ont aussi établi qu'en autorisant $(n-2)$ plis simultanés, il devient possible de résoudre n'importe quelle équation polynomiale à coefficients entiers de degré n. Cela établit que le pouvoir théorique de construction de l'origami, conçu sous sa forme la plus générale avec des plis multiples, donne tous les nombres algébriques, ce qui était inespéré.

Le théorème de la découpe unique

Dans un de ses tours, le célèbre prestidigitateur américain Harry Houdini effectuait le pliage d'une feuille de papier, donnait un coup de ciseaux et dépliait la feuille, qui montrait alors un trou parfait en forme d'étoile à cinq branches. Le pliage qui le permet n'est pas très compliqué, mais il suggère une question que Martin Gardner posa dans un article il y a plus de 20 ans : en opérant ainsi – des pliages, puis un coup de ciseaux –, quelles formes peut-on obtenir ? La réponse est étonnante : tout dessin composé de traits rectilignes, par exemple en forme de canard ou de papillon *(voir l'encadré page ci-contre)*.

Ce magnifique résultat de la découpe unique (*fold-and-cut theorem*) est dû aux Canadiens Erik Demaine, Martin Demaine (le père du premier) et Anna Lubiw. Il a été démontré en 1999, et la démonstration constructive décrit un algorithme qui fournit les pliages à effectuer. Depuis, divers compléments ont été apportés à cette première démonstration, conduisant à deux méthodes différentes pour savoir quel pliage faire et quel coup de ciseaux donner quand on s'est fixé le motif à obtenir.

Parmi les problèmes de pliages les plus simples, il y a celui de savoir combien de fois on peut replier une feuille de papier (ou de tissu) sur elle-même en deux par le milieu. Le problème admet deux versions : soit on autorise des plis selon une seule direction et on partira alors de préférence d'une feuille très allongée, soit on s'autorise à plier la feuille en deux selon deux axes perpendiculaires.

Il se racontait, sans qu'on sache bien d'où venait l'affirmation, que huit était le maximum possible pour ce nombre de pliages successifs en deux. Une jeune Américaine, Britney Gallivan, s'est prise de passion pour le problème. Elle a réussi à la fois à proposer une formule mathématique intéressante aidant à comprendre le problème et à pousser le record de pliage bien au-delà de tout ce qu'on imaginait possible. Après avoir plié une feuille d'or 12 fois en deux sur elle-même selon deux directions, la jeune fille encore élève au collège se procura un rouleau de papier toilette de 1 200 mètres de long et put le replier en deux sur lui-même 12 fois de suite dans une même direction.

B. Gallivan a étudié soigneusement le problème physico-géométrique de ce type de pliages. Contrairement à ce qu'on serait tenté de penser, pour augmenter le record d'une unité avec une bande d'épaisseur fixée, il ne faut pas une bande deux fois plus longue, mais une bande environ quatre fois plus longue. En effet, quand on plie la bande déjà pliée, une partie notable de la bande sert à joindre les parties horizontales.

Pliages limités par l'épaisseur du papier

La formule démontrée par B. Gallivan pour la longueur L perdue dans ces morceaux servant à raccorder les parties horizontales du pliage est :

$$L = e\,\pi\,(2^n + 4)\,(2^n - 1)/6,$$

où e est l'épaisseur du papier et n le nombre de plis effectués. On voit que L est à peu près quadruplée quand n augmente d'une unité.

Bien d'autres aspects du pliage sont aujourd'hui à l'étude. On découvre que derrière ces problèmes géométriques d'apparence simple se cachent des mathématiques merveilleuses concernant bien sûr la géométrie, mais aussi la théorie des nombres, l'algèbre, l'algorithmique et la théorie de la complexité. On est loin d'avoir fait le tour du sujet, qui prend une ampleur étonnante : les actes du congrès de 2011 sur l'origami, organisé par l'Université de Singapour, réunissent une cinquantaine de communications occupant 654 pages ! ■

■ L'AUTEUR

J.-P. DELAHAYE est professeur émérite à l'Université de Lille et chercheur au Laboratoire d'informatique fondamentale de Lille (LIFL).

■ BIBLIOGRAPHIE

R. Lang, **Origami Design Secrets, Mathematical Methods for an Ancient Art**, CRC Press (2e édition), 2012.

J. O'Rourke, **How to Fold it, The Mathematics of Linkage, Origami and Polyhedra**, Cambridge University Press, 2011.

E. Demaine et J. O'Rourke, **Geometric Folding Algorithms**, Cambridge University Press, 2007.

R. Alperin et R. Lang, **One-, two, and multi-fold origami axioms**, *Origami*, vol. 4, pp. 371-393, 2006.

Références supplémentaires sur le site www.pourlascience.fr

Retrouvez la rubrique Logique & calcul sur www.pourlascience.fr

pls_0448_p076081_logique_calcul.indd 81 08/01/15 18:44