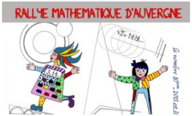
Promenade à travers les rallyes
Collège Fontreyne

Gilles Aldon

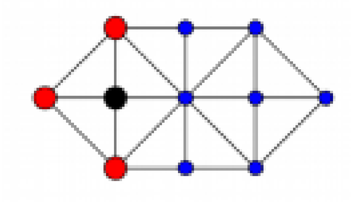
16 novembre 2021

Rallyes mathématiques

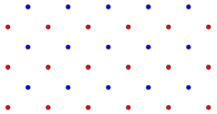
- Compétition non sportive dans laquelle les participants doivent répondre à chaque étape à une question ou résoudre une énigme pour être mis sur la piste de la suivante. (Tlfi)
- Rallye-papier, Rallye-ballon, Rallye mondain et . . . Rallye mathématique



Rallyes mathématiques



le jeu militaire



le jeu de Gale

La course à. . .

Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon

- depuis 2006,
- classes de troisième, seconde, seconde CAP, et premières années de Bac Pro,
- http://rallye-math.univ-lyon1.fr/

Les épreuves

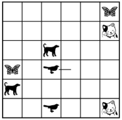
- Une épreuve en classe de 2 heures,

sujet classique 2020 ; niveau 1 ; feuille-réponse 4

1-Deux par deux

Relier les paires d'animaux semblables par des chemins qui ...

- ne se croisent pas,
- sont composés de 7 cases sans compter les cases de départ et d'arrivée,
- et passent d'une case à l'autre par les côtés et non par les sommets des cases.



Le début du chemin qui relie les deux oiseaux est tracé.

24-L'âge du capitaine

La edad del capitán es igual al número total de sus hijos, nietos y bisnietos. El capitán, sus hijos y sus nietos tuvieron todos el mismo número de hijos.

¿Cuál es la edad del capitán?

The captain's age is equal to the total number of his children, grandchildren and great-grandchildren. The captain, his children and his grandchildren all had the same number of children.

How old is the captain?

L'età del capitano è uguale al numero totale dei suoi figli, nipoti e bisnipoti. Il capitano, i suoi figli e i suoi nipoti hanno tutti avuti lo stesso numero di figli.

Qual è l'età del capitano?

Das Alter des Kapitäns entspricht der Gesamtanzahl seiner Kinder, seiner Enkel und seiner Urenkel.

Der Kapitän, seine Kinder und seine Enkel haben alle gleich viele Kinder.

Wie alt ist der Kapitän?

sujet classique 2020 ; niveau 3 ; feuille-réponse 2

33-Nombres en pyramide

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	...	...	...	...	...	...	...	...

Les épreuves

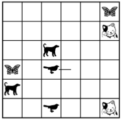
- Une épreuve en classe de 2 heures,
- une finale sur le campus de l'université Lyon 1,

sujet classique 2020 ; niveau 1 ; feuille-réponse 4

1-DEUX PAR DEUX

Relier les paires d'animaux semblables par des chemins qui ...

- ne se croisent pas,
- sont composés de 7 cases sans compter les cases de départ et d'arrivée,
- et passent d'une case à l'autre par les côtés et non par les sommets des cases.



Le début du chemin qui relie les deux oiseaux est tracé.

24-L'ÂGE DU CAPITAINE

La edad del capitán es igual al número total de sus hijos, nietos y bisnietos. El capitán, sus hijos y sus nietos tuvieron todos el mismo número de hijos.

¿Cuál es la edad del capitán?

The captain's age is equal to the total number of his children, grandchildren and great-grandchildren. The captain, his children and his grandchildren all had the same number of children.

How old is the captain?

L'età del capitano è uguale al numero totale dei suoi figli, nipoti e bisnipoti. Il capitano, i suoi figli e i suoi nipoti hanno tutti avuti lo stesso numero di figli.

Qual è l'età del capitano?

Das Alter des Kapitäns entspricht der Gesamtanzahl seiner Kinder, seiner Enkel und seiner Urenkel.
Der Kapitän, seine Kinder und seine Enkel haben alle gleich viele Kinder.

Wie alt ist der Kapitän?

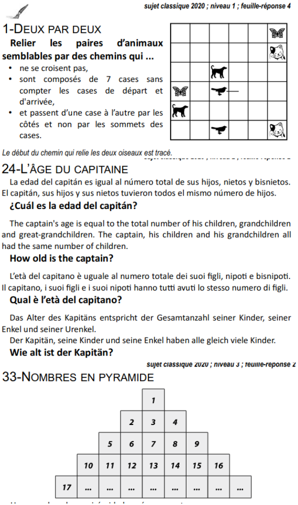
sujet classique 2020 ; niveau 3 ; feuille-réponse 2

33-NOMBRES EN PYRAMIDE

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 ... ...

Les épreuves

- Une épreuve en classe de 2 heures,
- une finale sur le campus de l'université Lyon 1,
- un problème ouvert.



sujet classique 2020 ; niveau 1 ; feuille-réponse 4

1-DEUX PAR DEUX

Relier les paires d'animaux semblables par des chemins qui ...

- ne se croisent pas,
- sont composés de 7 cases sans compter les cases de départ et d'arrivée,
- et passent d'une case à l'autre par les côtés et non par les sommets des cases.

Le début du chemin qui relie les deux oiseaux est tracé.

24-L'ÂGE DU CAPITAINE

La edad del capitán es igual al número total de sus hijos, nietos y bisnietos. El capitán, sus hijos y sus nietos tuvieron todos el mismo número de hijos.

¿Cuál es la edad del capitán?

The captain's age is equal to the total number of his children, grandchildren and great-grandchildren. The captain, his children and his grandchildren all had the same number of children.

How old is the captain?

L'età del capitano è uguale al numero totale dei suoi figli, nipoti e bisnipoti. Il capitano, i suoi figli e i suoi nipoti hanno tutti avuti lo stesso numero di figli.

Qual è l'età del capitano?

Das Alter des Kapitäns entspricht der Gesamtanzahl seiner Kinder, seiner Enkel und seiner Urenkel.
Der Kapitän, seine Kinder und seine Enkel haben alle gleich viele Kinder.

Wie alt ist der Kapitän?

sujet classique 2020 ; niveau 3 ; feuille-réponse 2

33-NOMBRES EN PYRAMIDE

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
17 ... ...

Rallye sur le campus

10 ans et 10 problèmes

Les problèmes "ouverts"

Problème ouvert

Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique
de l'Académie de Lyon

2011-2020

Gilles Aldon

Claude Tisseron

Problème 1

Soit *a* un nombre entier positif.

- On appelle chaîne de *a* une suite d'opérations (addition, soustraction, multiplication, division) qui n'utilisent que le nombre *a*.
- On appelle valeur de la chaîne le résultat du calcul.
- On appelle longueur de la chaîne le nombre d'opérations.
- On peut utiliser des parenthèses.

1. Pour une chaîne de *a* de longueur donnée, quelle est la plus grande valeur ? La plus petite ?
2. Pour un nombre *a* donné, quelles sont les valeurs atteintes ?
3. Combien y a-t-il de valeurs distinctes pour une longueur de chaîne donnée ?
4. ...

Problème 1

Avec $a = 6$
$6 \times 6 \div 6 - (6 \div 6 + 6)$ est une chaîne de 6 de longueur 5 dont la valeur est -1.
Avec $a = 7$
$7 \times 7 \times 7 \times (7 - 7 \div 7) - 7 \times 7 + (7 + 7) \div 7$ est une chaîne de 7 de longueur 10 dont la valeur est 2011.
Avec $a = 2011$
$2011 \div (2011 + 2011)$ est une chaîne de 2011 de longueur 2 dont la valeur est $\frac{1}{2}$.

Problème 1

Un résultat :
Les nombres atteints dans une chaîne de longueur 3 de nombre a sont :

$$\{0,\ 2,\ a-1,\ a,\ a+1,\ 2a,\ 3a,\ a^2-a,\ a^2+a,\ 2a^2,\ a^3\}$$

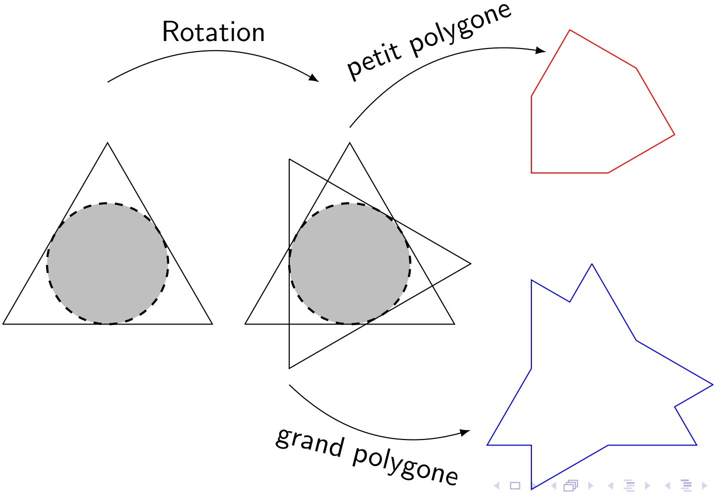
Et pour une chaîne de longueur 4 ?
Existe-t'il des nombres qui seront atteints quelque soit le nombre a non nul de départ ?

Problème 2

- On part d'un cercle C et on appelle A son centre.
- On construit un polygone P dont tous les côtés sont tangents au cercle C.
- On construit ensuite un polygone P' en faisant tourner P autour du point A.
- A partir des deux polygones P et P', on peut définir deux nouveaux polygones : un *petit polygone*, intersection de P et P', et un *grand polygone*, réunion de P et P'.
- On s'intéressera à différentes propriétés du polygone P (formes possibles, périmètre, aire,...), puis à des propriétés du *petit polygone* et du *grand polygone* obtenus par différentes rotations.

Problème 2

Exemple



Problème 2

Si on appelle $\mathscr{A}_{pP}$, $\mathscr{A}_{gP}$ et $\mathscr{A}_{P}$ les aires des petits, grands polygones et polygone initial, et $\mathscr{P}_{pP}$ et $\mathscr{P}_{gP}$, $\mathscr{P}_{P}$ leurs périmètres, il vient :

$$\mathscr{A}_{pP} + \mathscr{A}_{gP} = 2 \times \mathscr{A}_{P}$$

$$\mathscr{P}_{pP} + \mathscr{P}_{gP} = 2 \times \mathscr{P}_{P}$$

Problème 2

Cas des polygones réguliers à n côtés, dans une rotation θ et en posant : $\alpha = \frac{\pi}{n} - \frac{\theta}{2}$

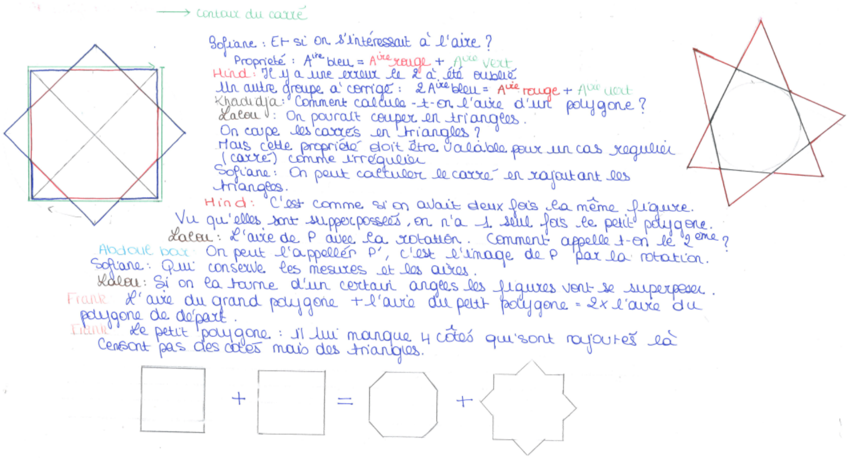
$$\mathscr{A} = \frac{1}{4} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\alpha} \times \frac{\sin\frac{(n-2)\pi}{n}}{2\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} - \theta\right)}{2\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathscr{A}_{gP} = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \frac{n}{4} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\alpha} \times \frac{\sin\frac{(n-2)\pi}{n}}{2\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} - \theta\right)}{2\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\mathscr{A}_{pP} = \frac{n}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \frac{n}{4} \times \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\alpha} \times \frac{\sin\frac{(n-2)\pi}{n}}{2\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{n} - \theta\right)}{2\cos\alpha\cos\frac{\theta}{2}}$$

On peut démontrer que la fonction $A_{gP}(\theta)$ admet un maximum sur $[0, \frac{2\pi}{n}]$ en $\frac{\pi}{n}$

Problème 2


→ contour du carré

Sofiane : Et si on s'intéressait à l'aire ?
Propriété : Aire bleu = Aire rouge + Aire vert
Hind : Il y a une erreur le 2 a été oublié
Un autre groupe a corrigé : 2 Aire bleu = Aire rouge + Aire vert
Khadidja : Comment calcule-t-on l'aire d'un polygone ?
Lalou : On pourait couper en triangles.
On coupe les carrés en triangles ?
Mais cette propriété doit être valable pour un cas regulier (carré) comme irrégulier
Sofiane : On peut calculer le carré en rajoutant les triangles.
Hind : C'est comme si on avait deux fois la même figure.
Vu qu'elles sont supperposées, on n'a 1 seul fois le petit polygone.
Lalou : L'aire de P avec la rotation. Comment appelle t-on le 2ème ?
Abdoul bax : On peut l'appellér P', c'est l'image de P par la rotation.
Sofiane : Qui conserve les mesures et les aires.
Lalou : Si on la tourne d'un certain angles les figures vont se superposer.
Frank : L'aire du grand polygone + l'aire du petit polygone = 2x l'aire du polygone de départ.
Frank : Le petit polygone : il lui manque 4 côtés qui sont rajoutés là ce n'sont pas des côtes mais des triangles.

+ = +

Un résultat proposé par une classe de seconde

Problème 3

Première année d'un problème collaboratif utilisant WIMS.
Trouver le plus grand nombre d'entiers entre 0 et ... qui sont le résultat d'opérations utilisant les chiffres de 2013, exactement une fois chacun, et uniquement ces chiffres.
Pour chacun de ces nombres, trouver un maximum d'écritures différentes à partir des chiffres 2, 0, 1, 3 dans cet ordre. A défaut, on cherchera une écriture utilisant ces chiffres dans le désordre.
Dans l'ordre (2, 0, 1, 3).
Exemple :

- $2 \times 0 \times 13 = 0$
- $(2 + 0 + 1)/3 = 1$

Problème 3

Que peut-on utiliser ?

Problème 3

Que peut-on utiliser ?

Tout

Problème 3

Que peut-on utiliser ?

Tout

Plus précisément :

- Juxtaposition des chiffres pour écrire un nombre ;
  $\overline{20} + 1 \times 3 = 23$
- Parentèses : $\overline{((2+0) \times 1)3} = 23$
- Toute fonction connue : puissance, racines : $20^1 + 3 = 23$
- Toute fonction découverte : factorielle, partie entière, partie entière supérieure,... : $\lceil 20 + 1 + \sqrt{3} \rceil = 23$

Problème 3

- manipulation des nombres, calculs réfléchis, découverte de fonctions, d'opérations ?...
- bonne occasion pour programmer : Exemple

Essayez avec 2021 !

Problème 3

$$\forall n > 0 \;\; n = -\frac{\ln\left(\dfrac{\ln\left(\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}_{n}\right)}{\ln(0!+1)}\right)}{\ln\left(\left\lceil\sqrt{3}\right\rceil\right)}$$

ou, écrit en ligne :

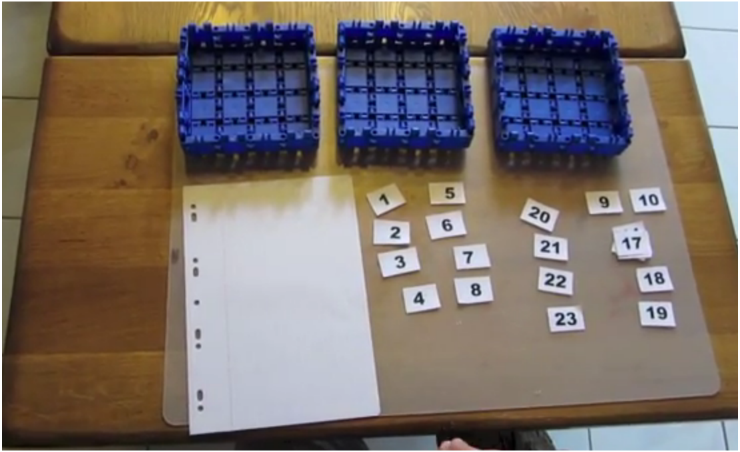
$$n = -\ln(\ln(\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\mathbf{2}}}}}_{n})/\ln(\mathbf{0}!+\mathbf{1}))/\ln\left(\left\lceil\sqrt{\mathbf{3}}\right\rceil\right)$$

Problème 4

On dispose de n récipients dans lesquels on doit mettre les nombres entiers, dans l'ordre avec la seule condition qu'il est impossible de mettre dans un récipient un nombre s'il est égal à la somme de deux nombres déjà présents. Jusqu'à quel nombre peut-on aller ? Un vrai problème ouvert en mathématiques !

Problème 4

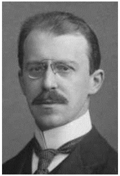
Expérience



Problème 4

$S(n)$ est le plus grand entier tel qu'on puisse partitionner l'ensemble $\{1, 2, ..., m\}$ en n sous-ensembles avec la propriété de ne jamais avoir $a + b = c$ pour tout élément distinct a, b, c dans un sous-ensemble. (ce qui est exactement la suite des nombres des boîtes explosives !)

Problème 4



Nombres de Schur (1875-1941)

Le plus grand entier N tel qu'on puisse n-colorer la suite $1, \ldots, N$ de telle sorte que tous les triplets $(a, b, a+b)$ soient n-coloriés. (ici a peut être égal à b).

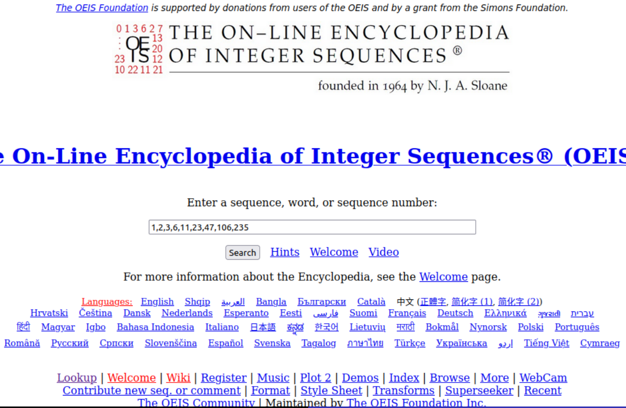
Problème 4

Exemple pour 2 : 1, 2 3 4 et 5 ne peut pas être ajouté.
En effet : (1,1,2), (1, 2 3), (1, 3 4) et (2, 2, 4) sont bien bicolores.
On ne peut pas construire un bicoloriage pour 5. En effet :
On peut donner arbitrairement à 1 la couleur bleu. Comme il y a le triplet (1,1, 2), 2 est nécéssairement rouge.
Comme il y a le triplet (2, 2, 4), 4 est nécessairement bleu
Donc 1 et 4 sont bleus. Pour éviter que le triplet (1, 3, 4) soit monochromatique, 3 est forcément rouge.
Mais alors 5 ne peut être ni bleu (sinon, (1, 4, 5) serait monochromatique)
ni rouge, (sinon (2, 4,5) serait aussi monochromatique.)

Problème 4

Une adresse intéressante : The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®)

https://oeis.org/



Problème 4

Une adresse intéressante : The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®)

https://oeis.org/

The OEIS Foundation is supported by donations from users of the OEIS and by a grant from the Simons Foundation.

THE ON–LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES ®

founded in 1964 by N. J. A. Sloane

1,4,13,44,160 Search Hints

(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

Search: **seq:1,4,13,44,160**

Displaying 1-2 of 2 results found. page 1

Sort: relevance | references | number | modified | created Format: long | short | data

A045652 Schur's numbers (version 2). +30 5

1, 4, 13, 44, 160 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

OFFSET 1,2

COMMENTS Largest number such that there is an n-coloring of the integers 1, ..., a(n) such that each color is sum-free, that is, no color contains a triple x + y = z. - Charles R Greathouse IV, Jun 11 2013

The best known lower bounds for the next terms are due to Fredricksen and Sweet (see links): a(6) >= 536 and a(7) >= 1680. - Dmitry Kamenetsky, Oct 23 2019

REFERENCES R. K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, E11 and E12.

Marijn J. H. Heule, Schur Number Five, AAAI 2018.

LINKS Table of n, a(n) for n=1..5.

Problème 5

Dans ce problème on travaillera **avec les nombres entiers strictement positifs.**
On cherche le nombre de multiplications donnant comme résultat un certain nombre entier. Par exemple:
$? \times ? = 2$ est une multiplication de deux nombres dont le résultat est 2.

Il y en a exactement 2 différentes :

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 1 & = & 2 \\ 1 & \times & 2 & = & 2 \end{array}$$

Pouvez-vous trouver toutes les multiplications de deux facteurs dont le résultat vaut 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, …, 2015, …

Problème 5

Et s'il y a trois facteurs
Pouvez vous trouver toutes les multiplications de trois facteurs dont le résultat vaut 3, 4, 5, 6.
Combien de multiplications différentes de trois facteurs donnent comme résultat 100 ? 1000 ? 2015 ?...
Pouvez vous trouver une règle générale pour compter ces multiplications ?
Et avec quatre nombres ?

Problème 5

Il s'agit ici d'un problème de combinatoire.
Le nombre de multiplications à deux facteurs pour obtenir un nombre n est exactement le nombre de diviseurs de n.
Si

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}$$

alors le nombre de diviseurs, donc le nombre de multiplications de deux facteurs, est

$$\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$$

Problème 6

Imaginons une feuille de papier : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?
Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?

Problème 6

Imaginons une feuille de papier : je la coupe en deux, puis je prends un des deux morceaux et je le recoupe en deux, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en deux et ainsi de suite. Combien de fois je devrais faire cette opération pour avoir 2016 morceaux de papier ?

Maintenant : je la coupe en trois, puis je prends un des trois morceaux et je le recoupe en trois, puis je prends un des morceaux et je le recoupe en trois et ainsi de suite. Est-ce que je pourrais avoir un jour 2016 morceaux ?

Et si je faisais la même opération mais en coupant chaque fois en quatre ? En cinq ?... Plus généralement, quelles sont les découpes qui me permettraient d'obtenir 2016 morceaux ? Et si je voulais atteindre 2020 ? 2021 ? 2022 ? et si je voulais atteindre un nombre n de morceaux, quelles seraient les découpes qui me permettraient de l'atteindre ?

Problème 6

Un nombre p sera atteint par des découpes en n si et seulement si $n-1$ est un diviseur de $p-1$.

Exemple :

$2020 = 2^2 \times 5 \times 101$ donc les diviseurs de 2020 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010 et 2020. (il y en a bien 12 !)

2021 pourra être atteint en découpant en 2, 3, 5, 6, 11, 21, 102, 203, 405, 506 et bien sûr en 2021 !

Problème 6

Mais que se passe-t'il si on découpe en n et m morceaux aléatoirement ?

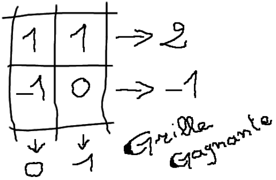
Problème 6

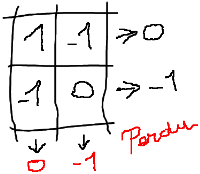
Mais que se passe-t'il si on découpe en n et m morceaux aléatoirement ?
si on veut découper en p et q morceaux, on pourra atteindre tous les nombres si $p-1 \wedge q-1 = 1$.
Si $p-1 \wedge q-1 = d$, l'équation $px+qy = n-1$ a des solutions (c'est à dire, les nombres atteints) si et seulement si d divise $n-1$.

Problème 7

Pour le problème de cette année vous n'aurez besoin que de trois nombres : 1, 0 et -1... et de grilles !
Il faudra remplir les grilles avec ces nombres mais avec une condition supplémentaire : en faisant la somme des nombres placés dans chacune des lignes et dans chacune des colonnes, vous trouverez des résultats tous différents. On dira qu'une grille est gagnante si aucune des sommes des lignes et des colonnes ne sont égales.

Problème 7



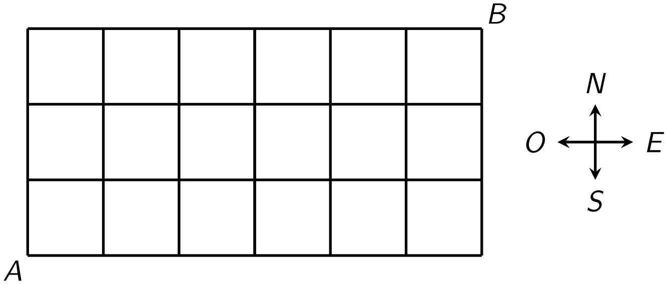


Quelles sont les grilles gagnantes de taille 2×2 ? De taille 3×3 ? de taille 4×4 ? ... de taille $n \times n$? Et plus généralement : Quelles sont les grilles que vous pouvez remplir en respectant cette règle ?

Problème 7

Un beau problème à chercher !

Problème 8



On veut se déplacer sur les segments de cette grille pour aller du point A au point B. On ne peut se déplacer que dans les directions E et N (voir sur le dessin).

Partie 1

Combien de chemins différents conduisent de A à B ?

Et si la grille était une grille de n colonnes et de p lignes ?

(n'hésitez pas à faire des essais avec des valeurs de n et de p !)

Problème 8

Partie 2

Toujours sur les mêmes grilles, la règle change ! Dès que l'on atteint le bord supérieur ou le bord droit, les déplacements autorisés changent et on ne peut plus se déplacer qu'en utilisant les directions O et S.

Combien de chemins partent de A et reviennent à A ?

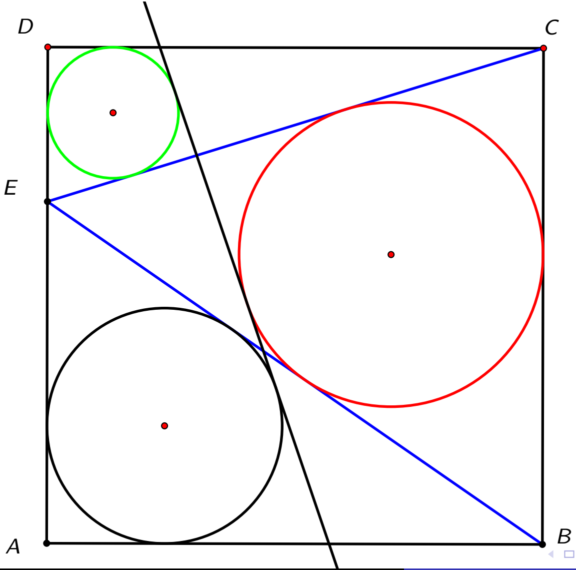
Partie 3

Et si maintenant la grille était dessinée dans l'espace. Les déplacements autorisés sont E, N, P.

Combien de chemins mènent de A à B dans un parallélépipède $n \times m \times p$?

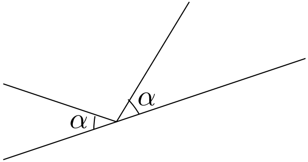
Et s'il y avait des rebonds ?

Problème 9



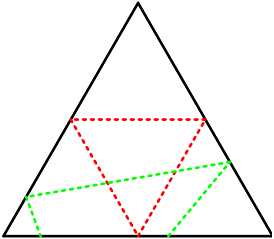
Problème 10

Dans une pièce polygonale obscure, j'utilise un pointeur laser qui se reflète sur les murs de telle sorte que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Autrement dit, si le rayon arrive sur le mur avec un angle de α degré, il en repart avec le même angle comme indiqué sur la figure.



Problème 10

Nous nous intéressons dans ce problème uniquement aux trajectoires fermées, c'est-à-dire aux trajectoires qui partent d'un point d'un côté, qui rebondissent sur tous les autres côtés, et qui reviennent à leur point de départ.



Existe-t-il d'autres trajectoires fermées dans le triangle équilatéral ? Si oui, comment les construire ? Si non, pourquoi n'y en a-t-il pas d'autres que celle montrée sur la figure ?

Et si la pièce est un carré (un quadrilatère régulier), ou un pentagone régulier, ou un hexagone régulier, ou ...

"Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question. S'il n'y a pas eu de question, il ne peut y avoir connaissance scientifique. Rien ne va de soi. Rien n'est donné. Tout est construit."

Gaston Bachelard