Le billard
Analyse mathématique dans le cas du triangle équilatéral

Gilles Aldon

20 novembre 2021

1 Énoncé

Dans une pièce polygonale obscure, j'utilise un pointeur laser qui se reflète sur les murs de telle sorte que l'angle d'incidence soit égal à l'angle de réflexion. Autrement dit, si le rayon arrive sur le mur avec un angle de α degré, il en repart avec le même angle comme indiqué sur la figure 1.

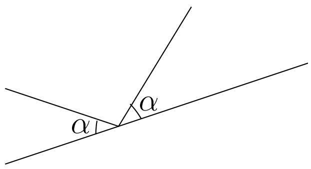

FIGURE 1: Reflet du laser sur le mur

Dans un premier temps, nous considèrerons que les polygones sont réguliers. Ainsi, le triangle sera équilatéral, le quadrilatère, un carré, le pentagone, un pentagone régulier, etc.
On suppose d'abord que la pièce est de forme triangulaire ; c'est à dire, comme nous venons de le voir, un triangle équilatéral. On place la source du laser sur un des côtés et on vise un autre côté.
La figure 2 montre une trajectoire qui revient à son point de départ (une trajectoire fermée), et une autre qui n'est pas fermée.

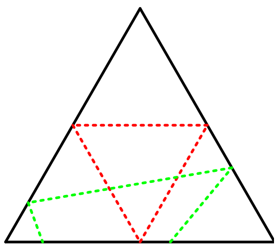

FIGURE 2: Une trajectoire fermée et une trajectoire qui ne l'est pas

Nous nous intéressons dans ce problème uniquement aux trajectoires fermées, c'est-à-dire aux trajectoires qui partent d'un point d'un côté, qui rebondissent sur tous les autres côtés, et qui reviennent à leur point de départ.

Des questions que l'on peut se poser

Existe-t-il d'autres trajectoires fermées dans le triangle équilatéral ? Si non, pourquoi n'y en a-t-il pas d'autres que celle montrée sur la figure 2 et qui joint les milieux des côtés du triangle ? Si oui, construisez en une autre ! A quelle(s) condition(s) un trajet de lumière sera fermé ?
Mais en fait, ces questions peuvent se poser de la même manière si la pièce est un carré (un quadrilatère régulier), ou un pentagone régulier, ou un hexagone régulier, ou ... et d'une façon générale dans un polygone régulier à n côtés.
Et si maintenant, les polygones n'étaient pas réguliers ?
Explorez ce problème, répondez aux questions, proposez des conjectures, des démonstrations, des constructions, posez vous (et posez nous) d'autres question, bref, faites des mathématiques !

2 Un peu de mathématiques

Dans ce document, je m'intéresse essentiellement au cas du triangle équilatéral. Il permet de bien comprendre le problème et les méthodes de résolution n'auront plus qu'à être généralisées.

2.1 Le cas du triangle équilatéral

2.1.1 Approche géométrique

La question se pose de savoir si il existe d'autres solutions que celle du triangle des milieux. Une idée est de « dupliquer » le triangle pour rendre le trajet de lumière linéaire comme indiqué sur la figure 3. Une condition nécessaire et suffisante pour que la trajectoire se ferme est que la distance $B'D'$ soit égale à la distance BD.
On peut remarquer que le rayon va rebondir sur les trois côtés si et seulement si la demi-droite $[DR_1)$ coupe le côté $[A'B']$. Et par conséquent, quelque soit la position du point de départ, il existe une trajectoire fermée et une seule.

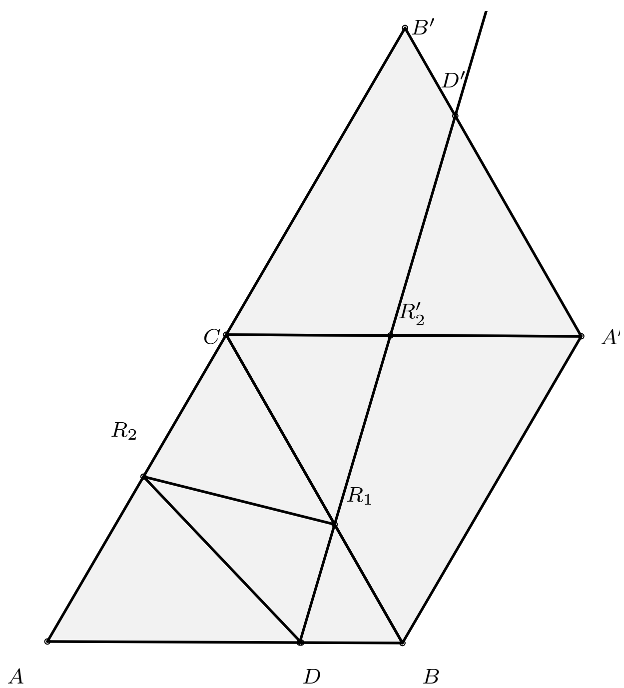

Figure 3: Une trajectoire fermée

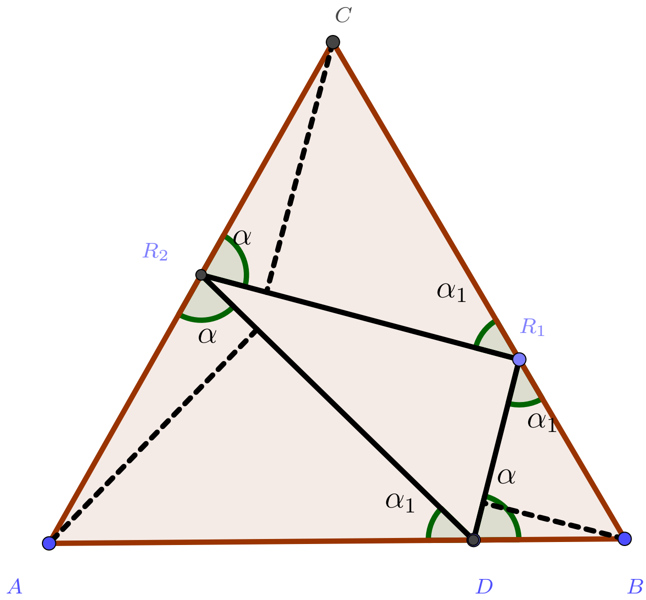

FIGURE 4: Rebonds dans le triangle

Cette "duplication" du triangle est en fait l'utilisation de deux symétries axiales (réflexion) successives ; d'abord d'axe (BC) qui transforme le triangle ABC dans le triangle $A'BC$, puis d'axe $A'C$ qui transforme le triangle $A'BC$ en $A'CB'$. Ainsi le côté de départ $[AB]$ est transformé en $[A'B]$ puis en $[A'B']$. La trajectoire $D - R_1 - R_2 - D$ dans le triangle va être représentée dans les réflexions successives de la manière suivante :

$$\begin{gathered} DR_1 \text{ dans le triangle } ABC \\ R_1R_2 \text{ dans le triangle } ABC \to R_1R_2' \text{ dans le triangle } A'BC \\ R_2D \text{ dans le triangle } ABC \to R_2'D' \text{ dans le triangle } A'B'C \end{gathered}$$

Et par conséquent la trajectoire est fermée si et seulement si $B'D' = BD$
Mais cette construction géométrique montre que quelque soit le point D de départ, il existe un angle permettant de fermer la trajectoire.

2.2 Angle et position

La question se pose alors de l'angle que doit faire la trajectoire en partant d'un point D du côté $[AB]$.
On utilise pour ce faire un peu de trigonométrie du triangle rectangle en considérant les hauteurs issues respectivement de B, C et A dans les triangles BDR_1, CR_2R_1 et AR_2D.
On remarque que les angles à la base de ces triangles sont α et α_1 et que l'angle au sommet est bien sûr $\frac{\pi}{3}$.
On va supposer que le côté du triangle équilatéral vaut 1. On suppose que $AD = d_1$ (donc $BD = 1 - d_1$).
On notera $BR_1 = d_2$ et $CR_2 = d_3$.
Dans le triangle DBR_1,

$$\sin\alpha = \frac{h}{1-d_1}$$
$$\sin\alpha_1 = \frac{h}{d_2}$$

Donc $h = (1-d_1)\sin\alpha = d_2 \sin\alpha_1$ et finalement

$$d_2 = (1-d_1)\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} \tag{1}$$

Dans le triangle R_1R_2C

$$\sin\alpha = \tfrac{h'}{d_3}$$
$$\sin\alpha_1 = \tfrac{h'}{1-d_2}$$

Et par conséquent, comme précédemment :

$$d_3 = (1-d_2)\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha} \tag{2}$$

Dans le triangle AR_2D

$$\sin\alpha = \tfrac{h''}{1-d_3}$$
$$\sin\alpha_1 = \tfrac{h'}{d_1}$$

Et par conséquent, comme précédemment :

$$d_1 = (1-d_3)\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} \tag{3}$$

En remplaçant d_3 par sa valeur en fonction de d_2 dans l'égalité (3), on obtient :

$$d_1 = \left(1 - \left((1-d_2)\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha}\right)\right)\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha 1} - 1 + d_2$$

En remplaçant alors d_2 par sa valeur en fonction de d_1 (égalité (1)), on obtient :

$$d_1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} - 1 + (1-d_1)\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

Soit :

$$d_1\left(1 + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1}\right) = 2\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} - 1$$

ou bien :

$$d_1 = \frac{2\sin\alpha - \sin\alpha_1}{\sin\alpha + \sin\alpha_1}$$

En se rappelant que $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3} - \alpha$.
On a donc bien une relation entre la position du point de départ sur le côté du triangle (d_1) et l'angle de départ de la trajectoire (α). Ainsi, par exemple si $d_1 = \frac{1}{2}$ alors $\sin\alpha = \sin\alpha_1$ soit $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (en se rappelant que α est un angle aigu).
Ou, si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ alors $d_1 = \frac{1}{2}$ ce qui nous ramène au triangle des milieux.

2.3 Analytiquement

On peut bien sûr plonger le triangle équilatéral dans un repère orthonormé, par exemple $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AY}\right)$.

Dans ces conditions : A a pour coordonnées (0,0), B a pour coordonnées (1,0), C a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La droite (AB) a pour équation $y = 0$, la droite (BC), $\sqrt{3}x + y = \sqrt{3}$ et la droite (AC), $y = \sqrt{3}x$.

Appelons D le point de départ sur $[AC]$; il a pour coordonnées $(d_1, \frac{\sqrt{3}}{d_1})$ (Placer le point de départ sur $[AC]$ facilite les calculs !).

Tous les personnages sont prêts pour les calculs !

Appelons δ_1, δ_2 et δ_3 les droites qui portent les trois segments de la trajectoire.

Ici, il faut revenir à la définition de notre trajectoire. En fait, δ_2 sera l'image par la réflexion de la perpendiculaire à (BA) passant par R_1 de δ_1. Il nous faut donc :

1. trouver l'équation de cette perpendiculaire,
2. trouver l'équation de l'image par une réflexion d'une droite.

(1) Le premier point est simple, puisque cette droite a un vecteur normal au vecteur directeur de (AB) et passe par R_1 :

(p) $x = x_{R_1}$

(2) Pour le deuxième point, il faut se rappeler un peu plus de choses !

Tout d'abord, supposons que l'axe d'une réflexion soit une droite d'équation $ax + by + c = 0$.

Alors, l'image d'un point M par cette réflexion de coordonnées (x, y) est donné par les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x - \frac{2a(ax+by+c)}{a^2+b^2} \\ Y = y - \frac{2b(ax+by+c)}{a^2+b^2} \end{array} \right.$$

Et par conséquent l'image de la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ est la droite d'équation $uX + vY + w = 0$, c'est à dire :

$$u\left(x - \frac{2a(ax + by + c)}{a^2 + b^2}\right) + v\left(y - \frac{2b(ax + by + c)}{a^2 + b^2}\right) + w = 0 \qquad (4)$$

Je passe ici les calculs pour arriver à ces résultats mais avec un peu de patience et de rigueur, il suffit d'exprimer le fait que l'image de M par la réflexion est un point M' et que l'axe de la réflexion est la médiatrice de $[MM']$.

Et la droite (R_1D_1) a pour équation :

$$\sqrt{3}d_1x + (r_1 - d_1)y - \sqrt{3}r_1d_1 = 0$$

La droite qui porte le premier rebond est alors :

$$-\sqrt{3}d_1x + (r_1 - d_1)y + \sqrt{3}r_1d_1 = 0$$

La droite qui porte le second rebond est :

$$\left(-\sqrt{3}d_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}r_1\right)x - \left(d_1 + \frac{1}{2}r_1\right)y + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-r_1 + 4d_1 - 2r_1d_1\right) = 0$$

Cette droite coupe le côté initial en un point d'abscisse :

$$x = \frac{-r_1 + 4d_1 - 2r_1d_1}{4d_1}$$

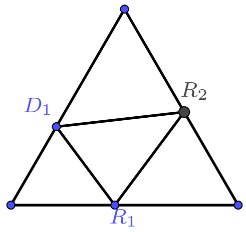

Figure 5: Un chemin fermé avec $d_1 = 0,2$ et $r_1 = \frac{16}{35}$

Et, le trajet est fermé si cette valeur est égale à d_1. En résolvant l'équation, il vient :

$$r_1 = \frac{4d_1(1-d_1)}{1+2d_1}$$

Par exemple, Supposons le point de départ au milieu de $[AC]$, alors l'abscisse x_1 et l'ordonnée $\sqrt{3}x_1$ vérifient :

$$d_1^2 + \left(\sqrt{3}d_1\right)^2 = \frac{1}{4} \text{ et donc } d_1 = \frac{1}{4}$$

r_1 vaut alors $\frac{1}{2}$ ce qui confirme le fait que si on part du milieu d'un côté alors la trajectoire fermée sera le triangle des milieux !
Supposons maintenant que le point de départ se situe au point de coordonnées $(0,2; \sqrt{3} \times 0,2)$, le point d'arrivée aura pour abscisse :

$$\frac{-r_1 + 0,8 - 0,4r_1}{0,8}$$

et il suffit de donner à r_1 la valeur $\frac{16}{35}$ pour que le chemin se ferme, comme illustré sur la figure 5.
Pour les généralisations, il faut voir la brochure IREM, Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon
2011-2020.

3 Conclusion

Quelques conseils si vous voulez utiliser ce problème :

- N'hésitez pas à faire les calculs intermédiaires que j'ai laissés dans l'ombre !
- Comprenez bien le cas du triangle équilatéral avant de généraliser.
- N'hésitez pas à faire des dessins, par exemple en utilisant GeoGebra.
- Amusez vous !