Problèmes APMEP n°541

October 3, 2021

1 Problème 541-4

Énoncé : A quelle condition la somme de trois réels et du produit de leurs inverses est-elle égale à la somme de leur produit et de la somme de leurs inverses ?
Autrement dit, on cherche les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$(R): \quad a+b+c+\frac{1}{abc} = abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Il est clair qu'il est nécessaire que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned}
a+b+c+\frac{1}{abc} = abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &\iff \frac{bca^2 + b^2ca + bc^2a + 1}{abc} = \frac{b^2c^2a^2 + bc + ca + ba}{abc} \\
&\iff \frac{bca^2 + b^2ca + bc^2a + 1 - b^2c^2a^2 - bc - ca - ba}{abc} = 0 \\
&\iff (bc - b^2c^2)a^2 + (b^2c + bc^2 - b - c)a + 1 - bc = 0 \\
&\iff bc(1-bc)a^2 - (1-bc)(b+c)a + 1 - bc = 0 \\
&\iff (1-bc)(bca^2 - (b+c)a + 1) = 0 \\
&\iff 1 - bc = 0 \quad \boxed{\text{ou}} \quad bca^2 - (b+c)a + 1 = 0 \\
&\iff bc = 1 \quad \boxed{\text{ou}} \quad bc\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(a - \frac{1}{c}\right) = 0 \\
&\iff bc = 1 \quad \boxed{\text{ou}} \quad a = \frac{1}{b} \quad \boxed{\text{ou}} \quad a = \frac{1}{c} \\
&\iff bc = 1 \quad \boxed{\text{ou}} \quad ab = 1 \quad \boxed{\text{ou}} \quad ac = 1
\end{aligned}$$

En conclusion, la relation (R) est vérifiée si et seulement si (au moins) deux des trois éléments a, b, c sont inverses l'un de l'autre.